Ex-02-01: Montrer que dans $\mathbb{R}$,

a) Si $x \leqslant y$ et $x' \leqslant y'$, alors $x + x' \leqslant y + y'$.
b) Si $x \leqslant y$, alors $-y \leqslant -x$.
c) Si $z > 0$, alors $x \leqslant y$ si et seulement si $xz \leqslant yz$.
d) Si $0 < x \leqslant y$, alors $1/x \geqslant 1/y$.

Ex-02-02: Montrer les propriétés ci-dessous.

a) $|-x| = |x|$
b) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$
c) Pour toute paire $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\max\{x,y\} = \tfrac{1}{2}\big(x + y + |x-y|\big)\,,$$
$$\min\{x,y\} = \tfrac{1}{2}\big(x + y - |x-y|\big)\,.$$

Ex-02-03: Sans faire de calculs, donner l'infimum et le supremum des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ ci-dessous. Dans chaque cas, préciser si il s'agit en plus d'un minimum ou d'un maximum.

a) $B =]\sqrt{3}, \infty[$
b) $C = \{x \in \mathbb{R} : |2x-1| \leqslant 1\}$
c) $D = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| < 1\}$
d) $E = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$
e) $F = \{\frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$
f) $G = \left\{\frac{n(-1)^n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$
g) $H = \mathbb{Q}$
h) $I = \mathbb{Q} \cap]0,1[$

Ex-02-04: On considère l'ensemble

$$A = \left\{\frac{3n}{n+2} \ : \ n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Calculer $\inf A$ et $\sup A$, uniquement à l'aide des définitions.

Ex-02-05: Soit $A \subset \mathbb{R}$ un intervalle borné non vide. Vrai ou faux ?

a) Si $\sup A \in A$ et $\inf A \in A$, alors A est fermé.
b) Si A est fermé, alors $\sup A \in A$ et $\inf A \in A$.
c) Si $\sup A \notin A$ et $\inf A \notin A$, alors A est ouvert.
d) Si A est ouvert, alors $\inf A \notin A$ et $\sup A \notin A$.

Ex-02-06: Montrer que le supremum d'un ensemble majoré est unique.

Ex-02-07: Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles bornés.

a) Montrer que si $A \subset B$, alors $\sup A \leqslant \sup B$ et $\inf A \geqslant \inf B$.
b) Si $x \leqslant y$ pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$, montrer que $\sup A \leqslant \inf B$.

c) Donner un exemple de deux ensembles disjoints A, B tels que $x < y$ pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$, et pour lesquels $\sup A = \inf B$.

d) Donner un exemple de deux ensembles disjoints A, B tels que $\inf A = \inf B$.

Ex-02-08: Montrer que si n est un entier tel que n^2 est pair, alors n est pair.

Ex-02-09: Montrer que les irrationnels sont denses dans $\mathbb{R}$.

Ex-02-10: Montrer que pour tout $y \geqslant 0$, l'équation

$$x^2 = y$$

possède toujours une solution dans $\mathbb{R}_+^*$; on la note $\sqrt{y}$, et on l'appelle **racine carrée de** y.

Remarque -1.1. Il existe une généralisation de ce résultat : pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $y \geqslant 0$, l'équation

$$x^p = y$$

possède une solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On la note $\sqrt[p]{y}$, et on l'appelle **racine p-ième de** y. ◇

Ex-02-11: (Cet exercice est facultatif.)

Soit $C := \{x \in \mathbb{R}_+ \,:\, x^3 < 1\}$.

a) Montrer que C est majoré.

b) Montrer que C ne possède pas de maximum.

c) Calculer $\sup C$.

Ex-02-12: (Cet exercice est facultatif.)

Montrer que l'ensemble $C := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$ est ouvert.