EPFL

Ens: S. Friedli
Analyse I - (n/a)
20 Novembre 2019, 8h15
60 minutes

n/a

n/a

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Cet examen est imprimé sur papier recyclé.

Première partie, 7 questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $x_n = \sqrt[n]{7}$ si n est pair et $x_n = \dfrac{1}{n^7}$ si n est impair. Alors :

- ☐ $\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = 1$
- ☐ $\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = 0$
- ☐ $\limsup_{n\to\infty} x_n = 1$ et $\liminf_{n\to\infty} x_n = 0$
- ☐ $\limsup_{n\to\infty} x_n = 0$ et $\liminf_{n\to\infty} x_n = 1$

Question 2 : Soit S l'ensemble des solutions de l'équation complexe $\overline{z}^2 = z^2$. Alors:

- ☐ $S = \{-1, +1, -\mathrm{i}, +\mathrm{i}\}$
- ☐ $S = \{a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C} : a = 0 \text{ ou } b = 0\}$
- ☐ $S = \emptyset$
- ☐ $S = \mathbb{R}$

Question 3 : Soit $\lambda = -\frac{1}{6}$. Déterminer, parmi les séries ci-dessous, celle qui converge.

- ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^n}$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\lambda}}$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\Big)^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{1-\lambda^2}\Big)^n$

Question 4 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $a_0 = \frac{3}{2}$, et pour $n \geq 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{8a_n - 7}$. Alors :

- ☐ $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$
- ☐ $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$
- ☐ $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- ☐ la suite est divergente

Question 5 : Soit s un paramètre réel, et soit $(b_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $b_n = \dfrac{1}{n^s}$ si n est pair, $b_n = \dfrac{1}{n^{2s}}$ si n est impair. Alors la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge si et seulement si

- ☐ $s > 2$
- ☐ $s > 1$
- ☐ $s > 0$
- ☐ $s > \frac{1}{2}$

Question 6 : Soit $m \in \mathbb{R}$, et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x)}{\ln\big(1+2x^2\big)} & \text{si } x < 0\,, \\ m & \text{si } x = 0\,, \\ \dfrac{x+1}{x^2+3x+1} & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

- ☐ Si $m = \frac{1}{2}$, alors f est continue à gauche mais pas à droite en $x = 0$.
- ☐ Si $m = \frac{1}{3}$, f est continue à droite mais pas à gauche en $x = 0$.
- ☐ Si $m = 1$, alors f est continue en $x = 0$.
- ☐ Si $m = \frac{1}{2}$, alors f est continue en $x = 0$.

Question 7 : Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par $A = \left\{x > 0 \,:\, \cos\left(\frac{1}{x}\right) > 0\right\}$. Alors :

- ☐ $\sup A = \frac{\pi}{2}$
- ☐ $\inf A = \frac{2}{\pi}$
- ☐ $\inf A = 0$
- ☐ $\sup A = 0$

Deuxième partie, 4 questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle peut être fausse dans certains cas).

Question 8 : Soit $z \neq 0$ un nombre complexe dont l'argument vaut $\frac{\pi}{4}$. Alors l'argument du nombre complexe $\frac{1}{z^2}$ vaut $-\frac{\pi}{2}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 9 : Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $x_0 = 2$ et, pour $n \geq 1$, $x_n = x_{n-1} - \frac{1}{n}$. Alors $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 10 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective. Alors f est strictement monotone.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 11 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble borné, et $B = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \text{ est un majorant de } A\}$. Alors $\inf B \in B$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 12: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 *Réservé au correcteur*

(a) (3pt) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $x_0 = \frac{5}{2}$, puis, pour $n \geq 0$,

$$x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n}\,.$$

Montrer rigoureusement que dans la limite $n \to \infty$, x_n converge vers une valeur, que l'on calculera.

(b) (2pts) Déterminer rigoureusement si la série ci-dessous converge ou diverge.

$$\sum_{n\geq 1} 2^n \sin\Big(\big(1 - \tfrac{1}{n}\big)^{n^2}\Big)\,.$$