Ens: S. Friedli
Analyse I - (n/a)
16 Novembre 2023
1h

n/a

n/a

SCIPER: **999999**

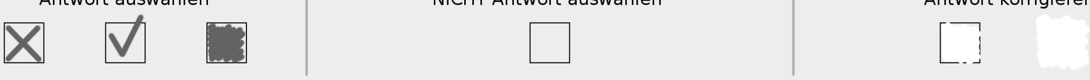
Signature :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages (les dernières pouvant être vides), et 31 questions. Ne pas dégrafer.

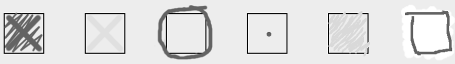
- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - $+3$ points si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - $+1$ point si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren



ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte



Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{6n+8}{2n}\right) - 3 - \frac{4}{n}.$$

Alors :

- ☐ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -6$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
- ☐ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -14$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
- ☐ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -3$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
- ☐ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -6$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 6$

Question 2 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n^2}$ converge si et seulement si

☐ $-1 < \alpha < 0$ ☐ $\alpha \geq 0$ ☐ $\alpha < 0$ ☐ $\alpha < -1$

Question 3 : Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles majorés. Alors :

- ☐ $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$
- ☐ $\sup(A \cup B) = \min\{\sup A, \sup B\}$
- ☐ $\sup(A \cup B) = (\sup A) \cdot (\sup B)$
- ☐ $\sup(A \cup B) = (\sup A) + (\sup B)$

Question 4 : Soit, pour $a_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie pour $n \geq 1$ par $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}$.

- ☐ Si $a_0 = 0$, la suite est convergente.
- ☐ Si $a_0 < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.
- ☐ Si $a_0 > 1$, la suite est croissante.
- ☐ Si $a_0 < 1$, la suite est décroissante.

Question 5 : Soit la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par $a_0 = \frac{3}{2}$, et pour $n \geq 1$ par $a_n = 3 - \frac{2}{a_{n-1}}$. Alors :

- ☐ la limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

Question 6 : Les nombres complexes $3, 1-2i$, et $1+2i$ sont les racines du polynôme

- ☐ $z^3 - 5z^2 + 11z - 15$
- ☐ $z^3 + 14z^2 + 15$
- ☐ $z^3 - 2iz^2 + 45$
- ☐ $z^3 - 5z^2 + 5z + 45$

Question 7 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $a_n = \dfrac{(n+3)^{1/2} - n^{1/2}}{(n+1)^{-1/2}}$. Alors :

- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$

Question 8 : Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = (-1)^k \dfrac{k+1}{k^2}$, et soit $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Alors :

- ☐ la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, mais ne converge pas absolument
- ☐ la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolument
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 9 : Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles non vides et bornés. Si $\inf A \leq \inf B$ et $\sup A \geq \sup B$, alors $B \subset A$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 10 : Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective et croissante. Alors la fonction réciproque $f^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 11 : Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| = 1$, alors $z^5 + \dfrac{1}{z^5}$ est un nombre réel.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 12 : Soient $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites de nombres réels telles que les séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergent. Alors la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 13 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels non-nuls telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$. Alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

☐ VRAI ☐ FAUX