EPFL

n/a

Ens: S. Friedli
Analyse I - (n/a)
Novembre 2021
60 minutes

n/a

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - $+3$ points si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - $+1$ point si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Partie commune, 7 questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $a_n = \dfrac{(n+3)^{1/2} - n^{1/2}}{(n+1)^{-1/2}}$. Alors :

- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Question 2 : Soit le nombre complexe $z = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$. Alors :

- ☐ $|z^6| > 73$
- ☐ $\mathrm{Re}(z^8) > 0$
- ☐ $z^{14} \in \mathbb{R}$
- ☐ $\mathrm{Im}(z^{11}) < 0$

Question 3 : Soit la série avec paramètre $b \in \mathbb{R}$ définie par :

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \left(b + \frac{1}{k}\right)^k$$

Alors s converge pour tout :

- ☐ $b < 1$
- ☐ $b \leq 1$
- ☐ $b \in \left]-1, 1\right[$
- ☐ $b \in \left]-1, 1\right]$

Question 4 : Soient les ensembles du plan complexe

$$A = \left\{z \in \mathbb{C} \colon z^2\left(|z| - 2\right) = 0\right\}, \qquad B = \left\{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}\,(z) = 1\right\}.$$

Alors :

- ☐ $A \cap B$ est l'ensemble vide
- ☐ $A \cap B$ contient exactement un point
- ☐ $A \cap B$ contient deux points
- ☐ $A \cap B$ contient tous les points d'une droite

Question 5 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $a_n = \dfrac{(5n+1)^n}{n^n 5^n}$. Alors :

- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{5}}$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$

Question 6 : Soit A l'ensemble défini par $A = \left\{x \in \mathbb{R} \colon 0 < \mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{\pi}{4}\right\}$. Alors :

- ☐ A n'est pas borné
- ☐ $A = \left]1, \frac{\pi}{2}\right[$
- ☐ $\mathrm{Inf}\, A = \frac{\pi}{2}$
- ☐ $A = \left]0, 1\right[$

Question 7 : Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3$. Soit $f_1 = f$ et, pour tout $n \geq 2$, $f_n = f \circ f_{n-1}$. Alors pour tout $n \geq 1$:

- ☐ $f_n(x) = x^{(3n)}$
- ☐ $f_n(x) = nx^3$
- ☐ $f_n(x) = x^{(3^n)}$
- ☐ $f_n(x) = (3x)^n$

Partie commune, 4 questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 8 : Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites convergentes avec $b_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$. Alors la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ existe.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 9 : Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $n \geq 1$, $f(n) > n$. Alors la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ converge.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 10 : Soit $A \subset \mathbb{R}$. Si $\operatorname{Inf} A \in A$ et $\operatorname{Sup} A \in A$, alors A est un intervalle fermé.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 11 : Pour tout $y \in \mathbb{R}$ donné, $y \neq 0$, l'équation $z^4 = \mathrm{i}\,y$ possède exactement quatre racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Troisème partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 12: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 *Réservé au correcteur*

(a) (3 points) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $a_n = \frac{1}{n^2+3n}$. Montrer, uniquement à l'aide de la définition de limite pour une suite, que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) (2 points) Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3^n n!}{n^n}$.