Ens. :
Analyse I - SECTION
21 novembre 2020
Durée : 70 minutes

1

Student One

SCIPER : **111111**

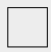
Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

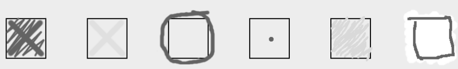
choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen



Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte



Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Partie commune, 8 questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 Soit $f\colon [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sin\left(\arctan(\sqrt{x}\,)\right)$. Alors l'ensemble image de f est égal à

☐ $[-1,1]$ ☐ $\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ ☐ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right[$ ☐ $]0,1]$

Question 2 Soit la suite de nombres réels (a_n) définie par $a_n = \dfrac{\sqrt[4n]{5}-4}{\sqrt[5n]{4}-5}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alors

☐ la suite converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} = \frac{5}{4}$.

☐ la suite converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} = \frac{3}{4}$.

☐ la suite converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} = \frac{4}{5}$.

☐ la suite diverge

Question 3 Soit $A = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \,:\, \dfrac{1}{\ln(x)} < 1\right\}$. Alors

☐ $\inf A = 0$

☐ $\inf A = \mathrm{e}$

☐ A n'est pas minoré

☐ $\sup A = \mathrm{e}$

Question 4 La partie imaginaire de $\left(-1+i\sqrt{3}\,\right)^5$ est

☐ $16\sqrt{3}$ ☐ $-16\sqrt{3}$ ☐ $32\sqrt{3}$ ☐ $32\sqrt{3}\,i$

Question 5 Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors

☐ la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

☐ les séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ convergent.

☐ la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ diverge.

☐ la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, mais ne converge pas absolument.

Question 6 Parmi les fonctions $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\,\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} x\sinh\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases},$$

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\,\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ x\ln(|x|) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

déterminer celles qui sont continues en $x = 0$:

☐ g et h ☐ f et h ☐ f et g ☐ toutes les trois

Question 7 La limite $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{5n+\sqrt{3n-\sqrt{2n}}}}$

- ☐ n'existe pas
- ☐ existe et vaut $\frac{1}{\sqrt{5}}$
- ☐ existe et vaut $\frac{1}{\sqrt{6}}$
- ☐ existe et vaut $\frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{3-\sqrt{2}}}}$

Question 8 La série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^{\frac{2}{\alpha}}\left(n^{2\alpha}+1\right)}}$ converge si

- ☐ $\frac{1}{2} < \alpha < 1$
- ☐ $1 < \alpha < 2$
- ☐ $\alpha = \frac{1}{2}$
- ☐ $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

Partie commune, 5 questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 9 Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 0$, il existe une infinité de nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Im}\,(\omega z) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Alors f est continue en exactement deux points.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et bornée, et soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n le réel défini par $a_n = f(n)$. Alors $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 12 Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs. Si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 13 Une fonction strictement croissante $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est toujours bijective.

☐ VRAI ☐ FAUX