Enseignant : S. Friedli - Examen BLANC - Section GM
Date : novembre 2019
Durée : 60 minutes

ID

Nom + Prénom étudiant

SCIPER : **SCIPER** Signature :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si aucune ou plus d'une réponse a été cochée,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si aucune ou plus d'une réponse a été cochée,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Cet examen est imprimé sur papier recyclé.

Première partie, 7 questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 Sei A die Teilmenge von $\mathbb{R}$ definiert durch $A = \left\{x > 0 \;:\; \cos\left(\frac{1}{x}\right) > 0\right\}$. Dann gilt :

- ☐ $\inf A = \frac{2}{\pi}$
- ☐ $\sup A = \frac{\pi}{2}$
- ☐ $\sup A = 0$
- ■ $\inf A = 0$

Question 2 Sei $S \subset \mathbb{C}$ die Menge der Lösungen der komplexen Gleichung $\bar{z}^2 = z^2$. Dann gilt :

- ☐ $S = \mathbb{R}$
- ☐ $S = \emptyset$
- ☐ $S = \{-1, +1, -\mathrm{i}, +\mathrm{i}\}$
- ■ $S = \{z \in \mathbb{C} \;:\; \mathrm{Re}(z) = 0 \text{ oder } \mathrm{Im}(z) = 0\}$

Question 3 Sei die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ definiert durch $x_n = \sqrt[n]{7}$ für gerade n und $x_n = \frac{1}{n^7}$ für ungerade n. Dann gilt :

- ☐ $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1$
- ☐ $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1$
- ☐ $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
- ■ $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Question 4 Sei $\lambda = -\frac{1}{6}$. Man bestimme unter den folgenden Reihen diejenige welche konvergiert :

- ☐ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-\lambda^2}\right)^n$
- ☐ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\lambda}}$
- ■ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^n$
- ☐ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^n}$

Question 5 Für einen reellen Parameter s betrachte man die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ definiert durch $b_n = \frac{1}{n^s}$ für n gerade, $b_n = \frac{1}{n^{2s}}$ für n ungerade. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ genau dann wenn

- ☐ $s > \frac{1}{2}$
- ■ $s > 1$
- ☐ $s > 0$
- ☐ $s > 2$

Question 6 Sei die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ definiert durch $a_0 = \frac{3}{2}$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{8a_n - 7}$ für $n \geq 0$. Dann gilt :

- ■ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$
- ☐ Die Folge divergiert.
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Question 7 Für $m \in \mathbb{R}$ betrachte man die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x)}{\ln\bigl(1+2x^2\bigr)} & \text{für } x < 0\,, \\ m & \text{für } x = 0\,, \\ \dfrac{x+1}{x^2+3x+1} & \text{für } x > 0\,. \end{cases}$$

Dann gilt :

- ■ Für $m = \frac{1}{2}$ ist f linksseitig stetig aber nicht rechtsseitig stetig an der Stelle $x = 0$.
- ☐ Für $m = \frac{1}{3}$ ist f rechtsseitig stetig aber nicht linksseitig stetig an der Stelle $x = 0$.
- ☐ Für $m = 1$ ist f stetig an der Stelle $x = 0$.
- ☐ Für $m = \frac{1}{2}$ ist f stetig an der Stelle $x = 0$.

Deuxième partie, 4 questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle peut être fausse dans certains cas).

Question 8 Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Menge und $B = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \text{ ist obere Schranke für } A\}$. Dann gilt $\inf B \in B$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 9 Sei $z \neq 0$ eine komplexe Zahl mit Argument $\frac{\pi}{4}$. Dann ist $-\frac{\pi}{2}$ das Argument der komplexen Zahl $\frac{1}{z^2}$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 10 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine bijektive Funktion. Dann ist f streng monoton.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 11 Man betrachte die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ definiert durch $x_0 = 2$ und $x_n = x_{n-1} - \dfrac{1}{n}$ für $n \geq 1$. Dann konvergiert $(x_n)_{n\geq 0}$.

☐ VRAI ■ FAUX

Troisième partie, question de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 12 : *Cette question est notée sur 5 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

(a) (3pt) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $x_0 = \frac{3}{2}$, puis, pour $n \geq 0$,

$$x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n}\,.$$

Montrer rigoureusement que dans la limite $n \to \infty$, x_n converge vers une valeur, que l'on calculera.

(b) (2pts) Déterminer rigoureusement si la série ci-dessous converge ou diverge.

$$\sum_{n\geq 1} 2^n \sin\left(\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^{n^2}\right)\,.$$