Ens: S. Friedli - Analyse I - (n/a)

20 novembre 2018, 18h - durée : 1 heure

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

n/a

n/a

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

  $+3$ points si la réponse est correcte,

  0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses inscrites,

  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

  $+1$ point si la réponse est correcte,

  0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses inscrites,

  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite de nombres réels et $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n \geq 0$, la suite de ses sommes partielles. Si $\lim_{n\to+\infty} s_n = 1$, alors :

- ☐ $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} s_{2n} < 1$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} (s_{2n} - 2s_n) = 0$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} (s_{2n} - s_n) = 0$

Question 2 : Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par

$$E = \left\{ \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right) : n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \right\} .$$

Alors :

- ☐ $\inf E = 0$
- ☐ $\inf E = -1$
- ☐ $\inf E = -1 - \sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$
- ☐ $\inf E = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Question 3 : Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $x_n = \dfrac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{3 + \sin(n\frac{\pi}{2})}$. Alors

- ☐ $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}$
- ☐ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$
- ☐ $\liminf_{n\to\infty} x_n = -\frac{1}{2}$
- ☐ $\limsup_{n\to\infty} x_n = 1$

Question 4 : Soit z le nombre complexe défini par $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}/3}$. Alors

- ☐ $|z| = \sqrt{2 + 2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}/3} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}/3}\right)}$
- ☐ $|z| = \sqrt{2}$
- ☐ $|z| = \sqrt{2 + 2\cos(\frac{2}{3})}$
- ☐ $|z| = \sqrt{1 + \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}/3} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}/3}\right)}$

Question 5 : Soit la série numérique S avec paramètre $c \in \mathbb{R}$ définie par

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{cn}} .$$

Alors:

- ☐ S converge si et seulement si $c > 3$
- ☐ S converge si et seulement si $c \geq 1$
- ☐ S converge si et seulement si $2 > c > 0$
- ☐ S converge si et seulement si $c \geq 0$

Question 6 : Soit une fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et la suite de nombre réels $(a_n)_{n\geq 0}$ définie récursivement par $a_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$, $a_n = g(a_{n-1})$. Alors, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge pour g définie par :

- ☐ $g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$
- ☐ $g(x) = 2x - 2$
- ☐ $g(x) = -x^2 + 2x - 2$
- ☐ $g(x) = x + 1$

Question 7 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite non-bornée de nombres réels. Alors

- ☐ pour tout $M > 0$, on a $|a_n| > M$ pour tout $n \geq 0$
- ☐ il existe n tel que $a_n = +\infty$ ou $a_n = -\infty$
- ☐ pour tout $M > 0$ il existe n tel que $|a_n| \geq M$
- ☐ soit $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, soit $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 8 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels telle que la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ définie par $b_n = \cos(a_n)$ converge. Alors la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 9 : La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^n$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 10 : Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{n}$, et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$. Alors $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 11 : Soit A un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$ et $c = \sup A$. Alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $x \in A$ tel que $x + \epsilon \geq c$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Troisième partie, question de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 12: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 *Réservé au correcteur*

(a) (1pt) Définir ce que signifie *converger vers* L pour une suite $(a_k)_{k\geq 0}$.

(b) (2pts) En utilisant votre définition en (a), montrer que la suite $(a_k)_{k\geq 0}$ définie par

$$a_k := \frac{k+(-1)^k}{k+2}$$

converge vers 1.

(c) (2pts) Soit $\lambda_n := \frac{n^2+1}{n+1}$. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{\lambda_n}}$. Justifier votre réponse..