**Ens. S. Friedli - Analyse I - (n/a)**

**15 janvier 2018 - durée : 3 heures**

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# n/a

## n/a

SCIPER : **999999**

**Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.**

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

  $+3$ points si la réponse est correcte,
  $0$ point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
  $-1$ point si la réponse est incorrecte.

- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

  $+1$ point si la réponse est correcte,
  $0$ point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
  $-1$ point si la réponse est incorrecte.

- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Respectez les consignes suivantes pour **marquer vos réponses** :

oui | ja | sì | yes

non | nein | non | no

## Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question mettre une croix dans la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

**Question [`mc-q01`] :** Soit le sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$,
$$E = \left\{ \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} .$$
Alors :

- ☐ Inf $E = 0$
- ☐ Inf $E = -1$
- ■ Inf $E = -1 - \sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$
- ☐ Inf $E = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

**Question [`mc-q02`] :** Soit le nombre complexe $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}/3}$. Alors :

- ☐ $|z| = \sqrt{2}$
- ☐ $|z| = \sqrt{2 + 2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}/3} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}/3}\right)}$
- ■ $|z| = \sqrt{2 + 2\cos(\frac{2}{3})}$
- ☐ $|z| = \sqrt{1 + \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}/3} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}/3}\right)}$

**Question [`mc-q03`] :** Soit la fonction $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)\,\mathrm{e}^{-x}$. Alors :

- ☐ $f$ atteint son minimum en $x = 0$ et son maximum en $x = \frac{\pi}{4}$.
- ☐ $f$ atteint son minimum en $x = 0$ en $x = \pi$ et en $x = 2\pi$.
- ■ $f$ atteint son minimum en $x = \frac{5\pi}{4}$ et son maximum en $x = \frac{\pi}{4}$.
- ☐ $f$ atteint son minimum en $x = \frac{3\pi}{2}$ et son maximum en $x = \frac{\pi}{2}$.

**Question [`mc-q04`] :** Soit une fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et la suite de nombre réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie récursivement par $a_0 = 1$ et $a_n = g(a_{n-1})$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alors, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour $g$ définie par :

- ■ $g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$
- ☐ $g(x) = -x^2 + 2x - 2$
- ☐ $g(x) = 2x - 2$
- ☐ $g(x) = x + 1$

**Question [mc-q05] :** Soit la suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$a_n = \frac{\mathrm{Log}(n+\mathrm{e}^n)}{n+1} \ .$$

Alors :

- ■ $a_n$ est une suite bornée et $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$
- ☐ $a_n$ est une suite non bornée
- ☐ $a_n$ est une suite bornée et $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- ☐ $a_n$ est une suite bornée et $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}$

**Question [mc-q06] :** Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, la suite des sommes partielles. Si $\lim_{n\to+\infty} s_n = 1$, alors :

- ☐ $\lim_{n\to+\infty} (s_{2n} - 2s_n) = 0$
- ■ $\lim_{n\to+\infty} (s_{2n} - s_n) = 0$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} s_{2n} < 1$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$

**Question [mc-q07] :** Soit la série numérique $S$ avec paramètre $c \in \mathbb{R}$ définie par

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{cn}} \ .$$

Alors :

- ☐ $S$ converge si et seulement si $2 > c > 0$
- ☐ $S$ converge si et seulement si $c \geq 0$
- ■ $S$ converge si et seulement si $c \geq 1$
- ☐ $S$ converge si et seulement si $c > 3$

**Question [mc-q08] :** Soit la fonction $f\colon \left]-\pi,\pi\right[ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\cos(x)-1} \ - 1 - x^2}{\big(\sin(x)\big)^2} \ .$$

Alors :

- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2}$
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
- ■ $\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{3}{2}$
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$

**Question [mc-q09] :** Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(e^{\frac{1}{x}}\right)}{e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0\,, \\ \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

Alors :

- ☐ $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty$
- ☐ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$
- ■ $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$
- ☐ $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -\infty$

**Question [mc-q10] :** Soit la fonction $f\colon [-1, 3\,] \to [-1, 3\,]$ définie par

$$f(x) = \sqrt{|x-1| + 2x}\ .$$

Alors :

- ☐ $f$ est discontinue en $x = 1$
- ☐ $f$ est surjective
- ■ $f$ est injective
- ☐ $f$ est dérivable sur $]{-1}, 3\,[$

**Question [mc-q11] :** Soit la fonction bijective $f\colon ]\,0, \infty\,[\ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 2 + \operatorname{Log}\left(\frac{2e + x}{x^2}\right)\ ,$$

et soit $f^{-1}$ la fonction réciproque de $f$ et $y_0 := f(2e)$. Alors :

- ☐ $(f^{-1})'(y_0) = -\dfrac{1}{2e+1}$
- ☐ $(f^{-1})'(y_0) = 2e + 1$
- ■ $(f^{-1})'(y_0) = -\dfrac{4e}{3}$
- ☐ $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{3}{4e}$

**Question [mc-q12] :** Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

Alors :

- ☐ $f$ n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.
- ■ $f$ est une fois dérivable sur $\mathbb{R}$, mais pas deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
- ☐ $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, mais pas trois fois dérivable.
- ☐ $f$ est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

**Question [mc-q13] :** Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)(x+2) & \text{si } x < 0\,, \\ \alpha x + \beta & \text{si } x \geq 0\,, \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors :

- ☐ $f(2) = 12$
- ☐ $f(3) = 9$
- ☐ $f'(2) = 2$
- ■ $f(-3) + f(1) = 7$

**Question [mc-q14] :** Soit $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ le développement limité d'ordre trois de la fonction $f\colon\, ]-1,1[\, \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

autour de $x = 0$. Alors :

- ☐ $a_3 = -\dfrac{1}{6}$
- ☐ $a_3 = 5$
- ■ $a_3 = \dfrac{5}{6}$
- ☐ $a_3 = 1$

**Question [mc-q15] :** Soit $r$ le rayon de convergence de la série entière $S$, définie par

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{5^{k+3}}\, x^k\ .$$

Alors :

- ☐ $r = 0$
- ☐ $r = \dfrac{1}{5}$
- ☐ $r = 25$
- ■ $r = 5$

**Question [mc-q16] :** Soit l'intégrale

$$I = \int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-4x+4x^2}}\,\mathrm{d}x\ .$$

Alors :

- ☐ $I = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\left(6-\sqrt{33}\right)$
- ☐ $I = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$
- ■ $I = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(5)$
- ☐ $I = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(5)$

**Question [mc-q17] :** Soit l'intégrale

$$I = \int_{1}^{e^3} \frac{\mathrm{Log}(x)}{x\,\sqrt{\big(\mathrm{Log}(x)\big)^2+1}}\,\mathrm{d}x\ .$$

Alors :

- ☐ $I = 2\,(\sqrt{10}-1)$
- ☐ $I = \frac{1}{2}\,(\sqrt{10}-1)$
- ■ $I = \sqrt{10}-1$
- ☐ $I = \sqrt{10}+1$

**Question [mc-q18] :** Soit l'intégrale généralisée

$$I = \int_{1}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,\mathrm{d}x\ .$$

Alors :

- ☐ $I = -\,\mathrm{Log}\left(e^2-1\right)$
- ☐ l'intégrale $I$ diverge
- ■ $I = \frac{1}{2}\ \mathrm{Log}\left(\frac{e+1}{e-1}\right)$
- ☐ $I = 2\ \mathrm{Log}\left(\frac{e-1}{e+1}\right)$

**Question [mc-integrale-sacha] :** Soit

$$I = \int_{0}^{1} x\cdot\arctan(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Alors

- ■ $I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$
- ☐ $I = -\frac{1}{2}$
- ☐ $I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}$
- ☐ $I = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$

**Question [mc-serie-entiere-sacha] :** Soit $a<1$ un nombre fixé. Alors l'ensemble

$$D = \left\{ x\in\mathbb{R}\ :\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(a-1)^n} \text{ converge} \right\}$$

est donné par

- ☐ $D = \mathbb{R}$
- ☐ $D = \left]-|a-1|\,,\,|a-1|\right[$
- ■ $D = ]a, 2-a[$
- ☐ $D = ]a, 1[$

## Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, mettre une croix (sans faire de ratures) dans la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

**Question [`tf-01-sacha`] :** Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble borné de $\mathbb{R}$ et $c = \operatorname{Sup} A$. Alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $x \in A$ tel que $x + \epsilon \geq c$.

■ VRAI ☐ FAUX

**Question [`tf-07-sacha`] :** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - 2h)}{h} = 2f'(x_0)\,.$$

■ VRAI ☐ FAUX

**Question [`tf-3`] :** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $b_n = \cos(a_n)$ converge. Alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

☐ VRAI ■ FAUX

**Question [`tf-08-sacha-bis`] :** Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série numérique divergente et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Alors la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

☐ VRAI ■ FAUX

**Question [`q:vf1FAVI`] :** Soit $f\colon [1,2] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f\big([1,2]\big) = \,]1,2[\,$. Alors $f$ n'est pas continue sur $[1,2]$.

■ VRAI ☐ FAUX

**Question [`q:vf5FAVI`] :** La fonction $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin\Big(\frac{e^x - 1}{x}\Big)$ est prolongeable par continuité en $x = 0$.

■ VRAI ☐ FAUX

**Question [`tf-1`] :** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ telles que $f'(x) \leq g'(x)$ pour tout $x \in \,]a,b[$. Alors $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in \,]a,b]$.

☐ VRAI ■ FAUX

**Question [tf-7] :** Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ deux sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}$ tels que $A \cap B \neq \emptyset$ (ensemble vide). Alors $\operatorname{Inf} A \leq \operatorname{Inf} A \cap B$.

■ VRAI ☐ FAUX

**Question [tf-8] :** Soit $f\colon\ ]-1,1[\ \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet autour de $x = 0$ le développement limité $f(x) = x - 2x^3 + x^3\varepsilon(x)$, où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 0.$$

■ VRAI ☐ FAUX

**Question [q:vf7FAVI] :** L'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin\bigl(x^{13}\bigr)\,\mathrm{d}x$ vaut zéro.

■ VRAI ☐ FAUX

## Troisième partie, questions de type ouvert

– Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
– Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.
– Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 31:** *Cette question est notée sur 3 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ■ 3 *Réservé au correcteur*

Soit $f\colon\ [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) := x\,e^{-x/5}$. Montrer qu'il existe $x_* > 0$ tel que $f(x_*) = 1$. On donnera une justification complète. Si des résultats du cours sont utilisés, on les énoncera.

**Question 32:** *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ■ 7 *Réservé au correcteur*

(a) Calculer le développement limité d'ordre 2 de $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ autour de $x_0 = 1$.

(b) Déterminer si la série

$$\sum_{n\geq 1} \left\{ \arctan\left( \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n} \right\}$$

converge ou diverge, en justifiant rigoureusement votre réponse.