EPFL

Ens: S. Friedli
Analyse I - (n/a)
16 janvier 2023
3h30

n/a

n/a

SCIPER : **999999**

Signature :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages (les dernières pouvant être vides), et 31 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx$ vaut

- ☐ $2 - \dfrac{3}{e}$
- ☐ $2 - \dfrac{4}{e}$
- ☐ $2 - \dfrac{1}{e}$
- ☐ $2 - \dfrac{5}{e}$

Question 2 : Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles majorés. Alors :

- ☐ $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$
- ☐ $\sup(A \cup B) = (\sup A) \cdot (\sup B)$
- ☐ $\sup(A \cup B) = (\sup A) + (\sup B)$
- ☐ $\sup(A \cup B) = \min\{\sup A, \sup B\}$

Question 3 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $a_n = (-1)^n \left(\frac{6n+8}{2n}\right) - 3 - \frac{4}{n}$. Alors :

- ☐ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -6$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
- ☐ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -3$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
- ☐ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -6$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 6$
- ☐ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -14$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

Question 4 : Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = (-1)^k \dfrac{k+1}{k^2}$, et soit $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$. Alors :

- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$
- ☐ la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, mais ne converge pas absolument
- ☐ la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolument
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$

Question 5 : Soit $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $f : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \cos(2x)$. Alors pour tous $x, y \in I$ tels que $x < y$ on a :

- ☐ $-2 \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0$
- ☐ $0 \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 2$
- ☐ $-1 \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 1$
- ☐ $-\pi \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq -1$

Question 6 : Les nombres complexes $3, 1 - 2i$, et $1 + 2i$ sont les racines du polynôme

- ☐ $z^3 - 5z^2 + 11z - 15$
- ☐ $z^3 - 5z^2 + 5z + 45$
- ☐ $z^3 + 14z^2 + 15$
- ☐ $z^3 - 2iz^2 + 45$

Question 7 : Soit la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par $a_0 = \frac{3}{2}$, et pour $n \geq 1$ par $a_n = 3 - \dfrac{2}{a_{n-1}}$. Alors :

- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$
- ☐ la limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

Question 8 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^x \log(1+x)$. Le développement limité d'ordre 3 de f autour de $x_0 = 0$ est donné par

- ☐ $f(x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$
- ☐ $f(x) = x + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$
- ☐ $f(x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$
- ☐ $f(x) = x - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$

Question 9 : Soit, pour $a_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie pour $n \geq 1$ par $a_n = \dfrac{1}{2}a_{n-1} + \dfrac{1}{2}$.

- ☐ Si $a_0 < 1$, la suite est décroissante.
- ☐ Si $a_0 > 1$, la suite est croissante.
- ☐ Si $a_0 < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.
- ☐ Si $a_0 = 0$, la suite est convergente.

Question 10 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $a_n = (3n+1)^{\log(\frac{1}{\sqrt{n}})}$. Alors :

- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$

Question 11 : L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{\log(x)}{x^2}\mathrm{d}x$

- ☐ converge et vaut $+1$
- ☐ converge et vaut -1
- ☐ diverge
- ☐ converge et vaut -4

Question 12 : L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-1}{(x-3)\,(x+2)}\,\mathrm{d}x$ vaut

- ☐ -1
- ☐ $\log(3) - \log(2)$
- ☐ $\sqrt{6}\,\arctan\big(\frac{1}{6}\big)$
- ☐ 0

Question 13 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \geq -1\,, \\ \frac{1}{2}(x^2+1) & \text{si } x < -1\,. \end{cases}$$

Alors :

- ☐ f est dérivable en $x = 0$ et continue en $x = -1$
- ☐ f est dérivable sur $\mathbb{R}$
- ☐ f n'est pas continue en $x = -1$
- ☐ f est dérivable en $x = -1$ et continue en $x = 0$

Question 14 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{n^2}$ converge si et seulement si

- [ ] $-1 < \alpha < 0$
- [ ] $\alpha < 0$
- [ ] $\alpha < -1$
- [ ] $\alpha \geq 0$

Question 15 : Soit $a_n = 1$ si n est pair et $a_n = 0$ si n est impair. Le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

- [ ] vaut 1
- [ ] vaut $\frac{1}{2}$
- [ ] vaut 0
- [ ] est infini

Question 16 : Soit $f\colon \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

Soit I l'ensemble image de f. Alors :

- [ ] $I = [1, 2]$
- [ ] $I = \left[1, 1 + \frac{1}{\pi}\right]$
- [ ] $I = \left[1 - \frac{1}{\pi}, 1\right]$
- [ ] $I = [2, 3]$

Question 17 : Soient a, $b \in \mathbb{R}$ et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{si } x \leq 0\,, \\ \sin(ax + b) & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

Alors f est continue sur $\mathbb{R}$ pour :

- [ ] $a = \dfrac{\pi}{2}$ et $b = \dfrac{\pi}{2}$
- [ ] $a = 0$ et $b = \dfrac{\pi}{4}$
- [ ] $a = 0$ et $b = -\dfrac{\pi}{4}$
- [ ] $a = -\dfrac{\pi}{4}$ et $b = 0$

Question 18 :

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-2/|x|} & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$ Alors :

- [ ] f est dérivable en $x = 0$
- [ ] f est continue mais pas dérivable en $x = 0$
- [ ] $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe mais f n'est pas continue en $x = 0$
- [ ] $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$. Alors il existe des nombres a, $b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - a - bx}{x} = 0$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui est continue en $x_0 = 0$. Alors la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = xf(x)$ est dérivable en $x_0 = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-\sin(x)}\,\mathrm{d}x$ vaut zéro.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Alors pour tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f possède un développement limité d'ordre n autour de x_0.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective et croissante. Alors la fonction réciproque $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| = 1$, alors $z^5 + \dfrac{1}{z^5}$ est un nombre réel.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles non vides et bornés. Si $\inf A \leq \inf B$ et $\sup A \geq \sup B$, alors $B \subset A$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels non-nuls telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$. Alors $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soient $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites de nombres réels telles que les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergent. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue dont l'ensemble image est $[0,1]$. Alors il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) - x = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Troisème partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 29: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 *Réservé au correcteur*

Soient $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\tanh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

(a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \tanh(x)$.

(b) Montrer que $\tanh(x)' = \dfrac{1}{\cosh(x)^2}$.

(c) Calculer la limite $\lim_{x \to +\infty} e^{2x} \log(\tanh(x))$, en justifiant toutes les étapes de votre raisonnement.

Question 30: *Cette question est notée sur 3 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 *Réservé au correcteur*

Montrer que si une suite réelle $(a_n)_{n\geq 1}$ n'est pas majorée, alors elle possède une sous-suite qui tend vers $+\infty$.

Question 31: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 *Réservé au correcteur*

Soit $f\colon\ ]0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(a) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. (Justifier.)

(b) Montrer qu'il existe une suite $x_n > 0$, telle que $x_n \to 0$, et telle que $\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = +\infty$.