Ens: S. Friedli
Analyse I - (n/a)
17 janvier 2022
3 heures

n/a

n/a

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages (les dernières pouvant être vides), et 33 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question [`QCM-complexes-B`] : Soit $z = \dfrac{2\,\mathrm{i}^9 - 4\,\mathrm{i}^{15}}{1-\mathrm{i}}$. Alors:

■ $z^6 = 8 \cdot 3^6\,\mathrm{i}$ □ $z^6 = 8 \cdot 3^6$ □ $z^6 = 8 \cdot 3^6(1+\mathrm{i})$ □ $z^6 = -8 \cdot 3^6\,\mathrm{i}$

Question [`QCM-cont-vs-derivab-A`] : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + \sin(x)$, et soit $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa fonction réciproque. Alors au point $y_0 = f(\pi)$:

■ $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = 1$ □ $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = -\dfrac{1}{3}$

□ f^{-1} n'est pas dérivable □ $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{2\pi - 1}$

Question [`QCM-contin-deriv-C1-B`] : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $\forall x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{x\sin(x)}{\sqrt{x^2+1} - 1}\,.$$

Alors:

■ $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 2$ □ $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{2}$

□ $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = +\infty$ □ $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$

Question [`QCM-dev-limite-A`] : Soit $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3\varepsilon(x)$ le développement limité d'ordre trois de la fonction $f(x) = e^{\sin(x)}$ autour de $x_0 = 0$. Alors a_3 est égal à:

■ 0 □ $\dfrac{1}{6}$ □ 1 □ $\dfrac{1}{2}$

Question [`QCM-dev-limite-B`] : Le développement limité d'ordre deux de la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$ autour de $x_0 = 0$ est:

■ $f(x) = \mathrm{e} + \mathrm{e}\,x + \frac{3}{2}\mathrm{e}\,x^2 + x^2\varepsilon(x)$ □ $f(x) = \mathrm{e} + \mathrm{e}\,x + 3\mathrm{e}\,x^2 + x^2\varepsilon(x)$

□ $f(x) = \frac{5}{2} + 2x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$ □ $f(x) = \frac{5}{2} + 2x + 4x^2 + x^2\varepsilon(x)$

Question [`QCM-inf-sup-A`] : Soit $A = \left\{y \in \mathbb{R} :\ \exists x \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } y = e^{-x}\right\}$. Alors

■ $\operatorname{Sup} A = 1$ □ A n'est pas majoré

□ $\operatorname{Inf} A = 1$ □ $\operatorname{Sup} A = \mathrm{e}$

Question [`QCM-int-generalisee-B`] : L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{1-} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$

■ diverge □ converge et vaut -1

□ converge et vaut 1 □ converge et vaut 0

Question [`QCM-integrale-first-B`] : L'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\,(x^2+3)}\,\mathrm{d}x$ vaut:

- ■ $\frac{1}{3}\operatorname{Log}(2) - \frac{1}{6}\operatorname{Log}\left(\frac{7}{4}\right)$
- □ $\operatorname{Log}(4) + \operatorname{Log}\left(\frac{7}{2}\right)$
- □ $\frac{1}{3}\operatorname{Log}(2) - \frac{1}{9}\operatorname{Log}\left(\frac{7}{4}\right)$
- □ $\operatorname{Log}(2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}(2)$

Question [`QCM-integrale-second-B`] : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{\sin(x)}\cos(x)\,\mathrm{d}x$ vaut:

- ■ $\mathrm{e}-1$
- □ 1
- □ 0
- □ e

Question [`QCM-limit-prolongmt-B`] : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f\colon\ [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2-10x-15}{x^2-x-6} & \text{si } x > 3\,, \\ a & \text{si } x = 3\,, \\ bx^2+1 & \text{si } 0 \leq x < 3\,. \end{cases}$$

Alors f est continue sur $[0,+\infty[$ pour:

- ■ $a=4,\ b=\frac{1}{3}$
- □ $a=0,\ b=-\frac{1}{9}$
- □ $a=5,\ b=\frac{4}{9}$
- □ $a=4,\ b=3$

Question [`QCM-limsup-liminf-B`] : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$a_n = \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}\,.$$

Alors :

- ■ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
- □ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -1$, et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{3}-\sqrt{2}$
- □ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -1$, et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
- □ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

Question [`QCM-serie-A`] : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $a_n = \dfrac{(-2)^n (n!)^2}{(2n)!}$.
Alors la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est:

- ■ absolument convergente
- □ convergente mais pas absolument convergente
- □ divergente car $|a_n| \to +\infty$
- □ divergente car $|a_n| \to 1$

Question [QCM-serie-entiere-B] : La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+4}}(x+1)^n$ converge si et seulement si $x \in I$, où:

- [x] $I = \left]-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right[$
- [ ] $I = \left]-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right]$
- [ ] $I = \left[-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right]$
- [ ] $I = \left]\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right]$

Question [QCM-serie-parametre-D-bis] : Soit $f\colon \left]-1,1\right[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \sum_{n=2}^{\infty} t^n$. Alors:

- [x] $f'(\frac{1}{2}) = 3$
- [ ] $f'(\frac{1}{2}) = 7$
- [ ] $f'(\frac{1}{2}) = -5$
- [ ] $f'(\frac{1}{2}) = 0$

Question [QCM-suites-convergence-A] : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $a_n = \mathrm{e}^{-n}\,\mathrm{e}^{n^2 \operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)}$. Alors:

- [x] $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$
- [ ] $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
- [ ] $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$
- [ ] $\lim_{n\to+\infty} a_n = \mathrm{e}$

Question [QCM-suites-recurrence-A] : Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $x_0 = 3$ et, pour $n \geq 1$, $x_n = \frac{3}{4}x_{n-1} + 2$. Alors:

- [x] $\lim_{n\to+\infty} x_n = 8$
- [ ] $\lim_{n\to+\infty} x_n = 2$
- [ ] $(x_n)_{n\geq 0}$ diverge
- [ ] $\lim_{n\to+\infty} x_n = 3$

Question [QCM-theo-accr-finis-B] : Soit $I = [-3, 0]$ et $f : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 3\mathrm{e}^{\frac{x+3}{3}} - 2$. Alors pour tout $x, y \in I$ tels que $x < y$ on a:

- [x] $1 \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 3$
- [ ] $3 \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 3\mathrm{e}$
- [ ] $2 \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \mathrm{e}$
- [ ] $-\infty < \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 0$

Question [QCM-val-intermed-image-interv-B] : Soit $f\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^x \cos(x)$. Alors l'ensemble image de f est égal à

- [x] $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\exp\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$
- [ ] $[0, 1]$
- [ ] $\left]0, 1\right]$
- [ ] $\left]0, \exp\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question [`TF-derivabilite-discussion-A`] : Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(-1) = f(1)$. Alors il existe $x_0 \in \,]-1, 1[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question [`TF-dev-limite-A`] : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable, $n \in \mathbb{N}^*$, et $f(x) = p_n(x) + x^n \varepsilon(x)$ le développement limité de f d'ordre n autour de zéro, où $p_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ est un polynôme. Alors

$$f'(0) = p'(0)\,, \quad f^{(2)}(0) = p_n^{(2)}(0)\,, \quad f^{(3)}(0) = p_n^{(3)}(0)\,, \quad \ldots \quad , \quad f^{(n)}(0) = p_n^{(n)}(0)$$

■ VRAI ☐ FAUX

Question [`TF-fonction-etc-A`] : Il existe une fonction bijective et continue $f : \,]-1, 1[\, \to \mathbb{R}$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question [`TF-induction-suites-limites-B`] : Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy.

■ VRAI ☐ FAUX

Question [`TF-inf-sup-B`] : Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non-vide, et soit $B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. Si A est majoré, alors B est majoré.

☐ VRAI ■ FAUX

Question [`TF-integrale-B`] : Soient $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continûment dérivables, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Alors:

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = -\int_a^b f'(x) g(x) dx$$

☐ VRAI ■ FAUX

Question [`TF-limites-continuite-A`] : Il existe une fonction continue $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question [`TF-serie-A`] : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

☐ VRAI ■ FAUX

Question [`TF-serie-B`] : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Alors $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question [`TF-serie-entiere-B`] : Si la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-3)^k$ converge pour $x = 2.8$, alors elle converge aussi pour $x = 3.1$.

■ VRAI ☐ FAUX

Troisème partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 29: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4 *Réservé au correcteur*

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite convergente. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^2}$ converge.

Remarque: Si on utilise des résultats du cours, on les énoncera entièrement, et on justifiera précisément leur utilisation.

Catalogue

Question 30: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ■ 6 *Réservé au correcteur*

(a) (1 points) Donner la définition précise de l'ensemble $C^1(]-1,1[)$.

(b) (5 points) Considérer la fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 5x + x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,, \end{cases}$$

et montrer que $f \in C^1(]-1,1[)$.

Question 31:

☐0 ☐1 ■2 *Réservé au correcteur*

Montrer que si $A = [0, 1[$, alors $\mathrm{Sup}(A) = 1$.

Question 32:

☐0 ☐1 ■2 *Réservé au correcteur*

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x+2}}$.

Question 33:

☐0 ☐1 ■2 *Réservé au correcteur*

Si $f(x) = (x+2)^x$ (définie sur $]-1, +\infty[$), calculer $f'(0)$.