



Ens: S. Friedli
Analyse I - XYZ
17 janvier 2022
3 heures

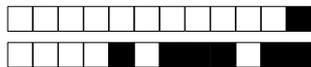
Lennon John

SCIPER: XXXXX1

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages (les dernières pouvant être vides), et 33 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		



Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : L'intégrale généralisée $\int_0^{1-} \frac{1}{1-x} dx$

diverge

converge et vaut 0

converge et vaut -1

converge et vaut 1

Question 2 : Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + \sin(x)$, et soit $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sa fonction réciproque. Alors au point $y_0 = f(\pi)$:

$(f^{-1})'(y_0) = -\frac{1}{3}$

$(f^{-1})'(y_0) = 1$

$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{2\pi - 1}$

f^{-1} n'est pas dérivable

Question 3 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $a_n = \frac{(-2)^n (n!)^2}{(2n)!}$. Alors la série

numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est:

convergente mais pas absolument convergente

divergente car $|a_n| \rightarrow +\infty$

absolument convergente

divergente car $|a_n| \rightarrow 1$

Question 4 : La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+4}} (x+1)^n$ converge si et seulement si $x \in I$, où:

$I =]-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}[$

$I = [-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}]$

$I =]-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}[$

$I =]\frac{1}{3}, \frac{5}{3}]$

Question 5 : Soit $I = [-3, 0]$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 3e^{\frac{x+3}{3}} - 2$. Alors pour tout $x, y \in I$ tels que $x < y$ on a:

$1 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 3$

$-\infty < \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0$

$3 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 3e$

$2 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq e$



Question 6 : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5x^2 - 10x - 15}{x^2 - x - 6} & \text{si } x > 3, \\ a & \text{si } x = 3, \\ bx^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x < 3. \end{cases}$$

Alors f est continue sur $[0, +\infty[$ pour:

$a = 5, b = \frac{4}{9}$

$a = 0, b = -\frac{1}{9}$

$a = 4, b = 3$

$a = 4, b = \frac{1}{3}$

Question 7 : L'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{x(x^2 + 3)} dx$ vaut:

$\frac{1}{3} \text{Log}(2) - \frac{1}{9} \text{Log}\left(\frac{7}{4}\right)$

$\text{Log}(2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arctg}(2)$

$\text{Log}(4) + \text{Log}\left(\frac{7}{2}\right)$

$\frac{1}{3} \text{Log}(2) - \frac{1}{6} \text{Log}\left(\frac{7}{4}\right)$

Question 8 : Soit $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^x \cos(x)$. Alors l'ensemble image de f est égal à

$[0, 1]$

$]0, \exp\left(\frac{\pi}{4}\right)]$

$]0, 1]$

$\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

Question 9 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable sur \mathbb{R} , telle que $\forall x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{x \sin(x)}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}.$$

Alors:

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 2$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = +\infty$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{2}$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$

Question 10 : Soit $z = \frac{2i^9 - 4i^{15}}{1 - i}$. Alors:

$z^6 = -8 \cdot 3^6 i$

$z^6 = 8 \cdot 3^6 i$

$z^6 = 8 \cdot 3^6$

$z^6 = 8 \cdot 3^6(1 + i)$

Question 11 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $a_n = e^{-n} e^{n^2 \text{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$. Alors:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = e$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

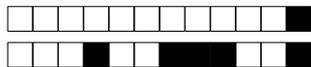
Question 12 : Soit $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3\varepsilon(x)$ le développement limité d'ordre trois de la fonction $f(x) = e^{\sin(x)}$ autour de $x_0 = 0$. Alors a_3 est égal à:

1

0

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{6}$



Question 13 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par

$$a_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}.$$

Alors :

- $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$
- $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -1$, et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$
- $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$
- $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -1$, et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

Question 14 : Soit $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \sum_{n=2}^{\infty} t^n$. Alors:

- $f'(\frac{1}{2}) = 0$ $f'(\frac{1}{2}) = -5$ $f'(\frac{1}{2}) = 3$ $f'(\frac{1}{2}) = 7$

Question 15 : Le développement limité d'ordre deux de la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$ autour de $x_0 = 0$ est:

- $f(x) = e + ex + 3e x^2 + x^2 \varepsilon(x)$ $f(x) = e + ex + \frac{3}{2}e x^2 + x^2 \varepsilon(x)$
- $f(x) = \frac{5}{2} + 2x + 2x^2 + x^2 \varepsilon(x)$ $f(x) = \frac{5}{2} + 2x + 4x^2 + x^2 \varepsilon(x)$

Question 16 : L'intégrale $\int_0^{\pi/2} e^{\sin(x)} \cos(x) dx$ vaut:

- e 0 1 e - 1

Question 17 : Soit $A = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } y = e^{-x}\}$. Alors

- $\text{Sup } A = 1$ A n'est pas majoré
- $\text{Sup } A = e$ $\text{Inf } A = 1$

Question 18 : Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $x_0 = 3$ et, pour $n \geq 1$, $x_n = \frac{3}{4}x_{n-1} + 2$. Alors:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 8$ $(x_n)_{n \geq 0}$ diverge
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 3$

**Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux**

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case **VRAI** si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case **FAUX** si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Il existe une fonction bijective et continue $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$.

VRAI FAUX

Question 20 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non-vidé, et soit $B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. Si A est majoré, alors B est majoré.

VRAI FAUX

Question 21 : Si la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-3)^k$ converge pour $x = 2.8$, alors elle converge aussi pour $x = 3.1$.

VRAI FAUX

Question 22 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

VRAI FAUX

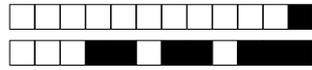
Question 23 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.

VRAI FAUX

Question 24 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable, $n \in \mathbb{N}^*$, et $f(x) = p_n(x) + x^n \varepsilon(x)$ le développement limité de f d'ordre n autour de zéro, où $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ est un polynôme. Alors

$$f'(0) = p'_n(0), \quad f^{(2)}(0) = p_n^{(2)}(0), \quad f^{(3)}(0) = p_n^{(3)}(0), \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = p_n^{(n)}(0)$$

VRAI FAUX



Question 25 : Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continûment dérivables, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Alors:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

VRAI FAUX

Question 26 : Soit $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(-1) = f(1)$. Alors il existe $x_0 \in]-1, 1[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

VRAI FAUX

Question 27 : Il existe une fonction continue $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

VRAI FAUX

Question 28 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy.

VRAI FAUX



Troisième partie, questions de type ouvert

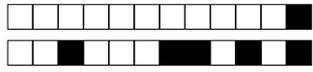
Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 29: *Cette question est notée sur 4 points.*

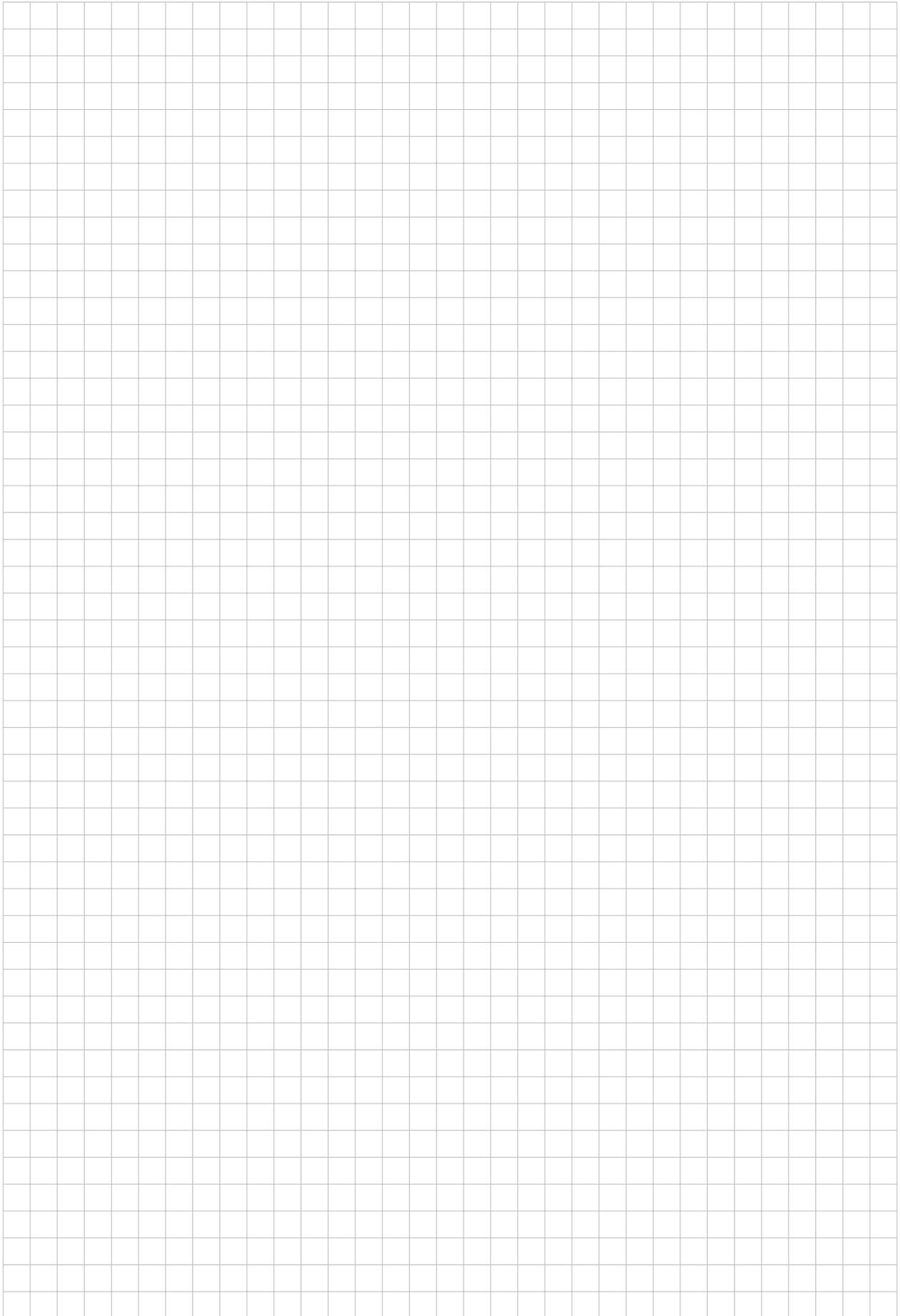
<input type="checkbox"/> ₀	<input type="checkbox"/> ₁	<input type="checkbox"/> ₂	<input type="checkbox"/> ₃	<input type="checkbox"/> ₄	<i>Réservé au correcteur</i>
---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------	------------------------------

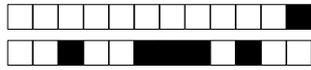
Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite convergente. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^2}$ converge.

Remarque: Si on utilise des résultats du cours, on les énoncera entièrement, et on justifiera précisément leur utilisation.



+1/8/53+





Question 30: *Cette question est notée sur 6 points.*

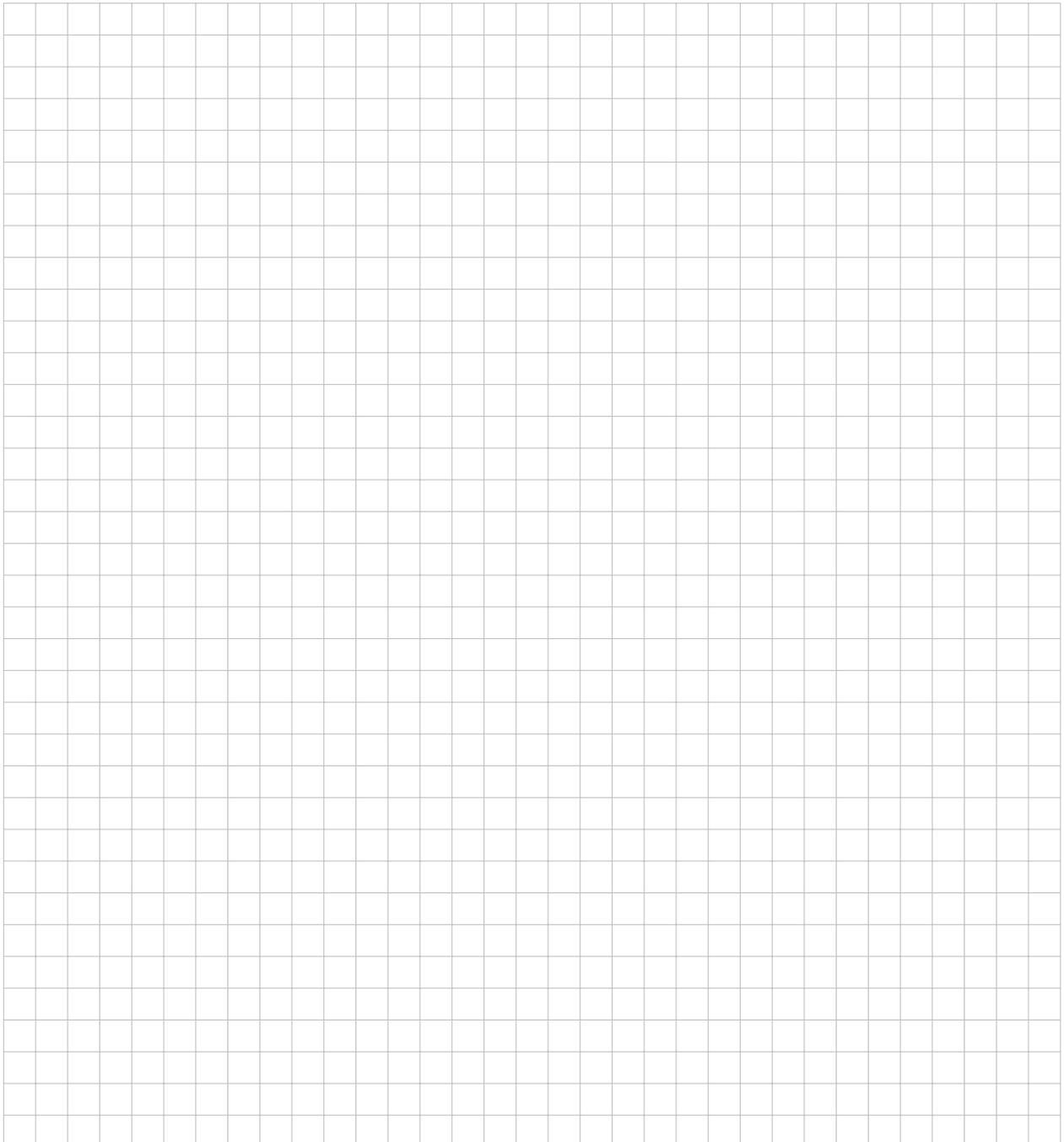
0 1 2 3 4 5 6

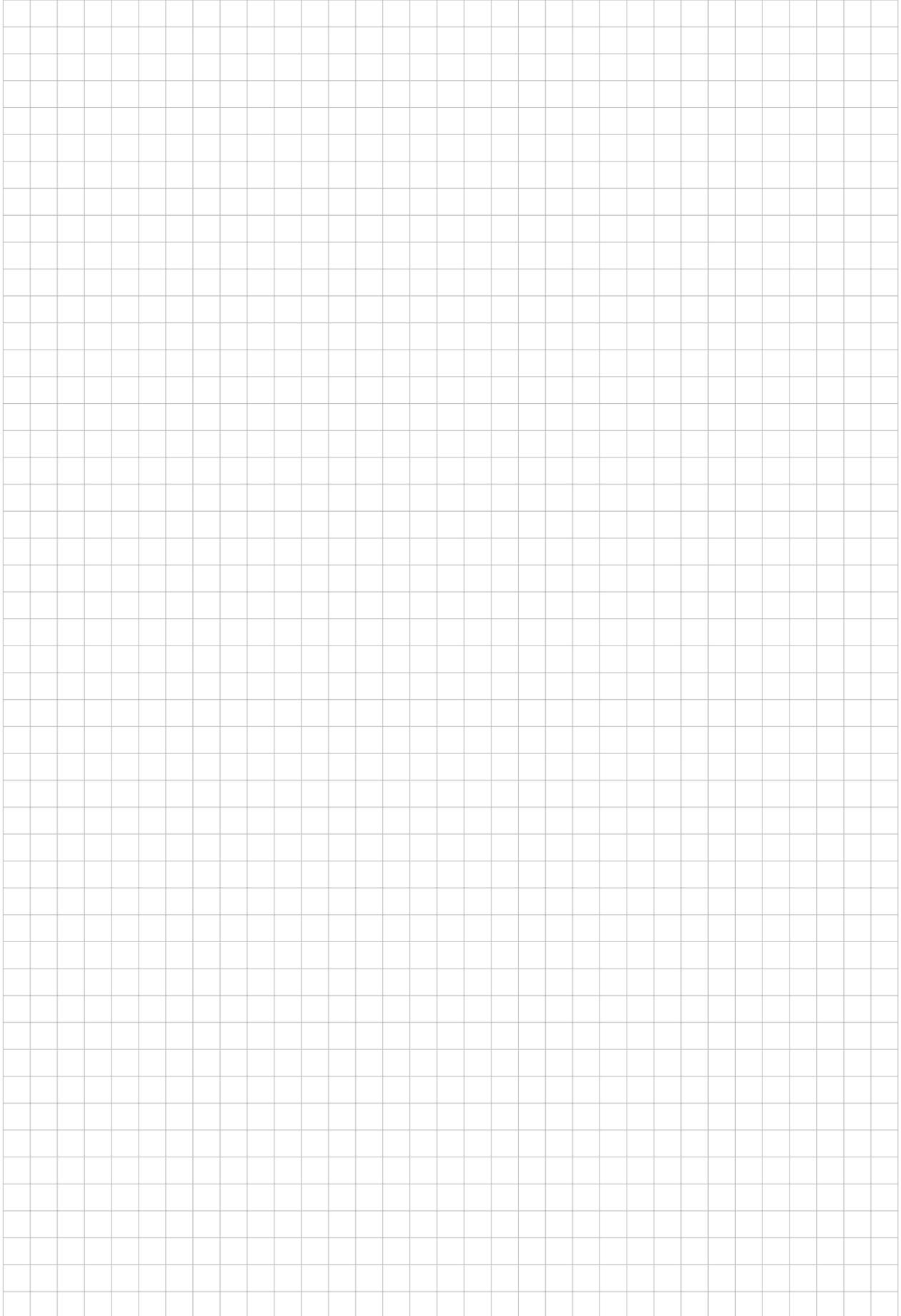
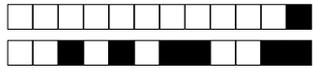
Réservé au correcteur

- (a) (1 points) Donner la définition précise de l'ensemble $C^1(]-1, 1[)$.
- (b) (5 points) Considérer la fonction $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 5x + x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

et montrer que $f \in C^1(]-1, 1[)$.







Question 31:

₀ ₁ ₂

Réservé au correcteur

Montrer que si $A = [0, 1[$, alors $\text{Sup}(A) = 1$.

Question 32:

₀ ₁ ₂

Réservé au correcteur

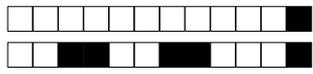
Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x+2}}$.

Question 33:

₀ ₁ ₂

Réservé au correcteur

Si $f(x) = (x + 2)^x$ (définie sur $] - 1, +\infty[$), calculer $f'(0)$.



+1/12/49+