EPFL

Ens: S. Friedli
Analyse I - (n/a)
11 janvier 2021
3 heures

n/a

n/a

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 pages (les dernières pouvant être vides), et 34 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - $+3$ points si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - $+1$ point si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Catalogue

Partie commune, 23 questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question [`QCM-complexes-A`] **:** Soit le nombre complexe $z = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$. Alors :

- [ ] $|z^6| > 73$
- [ ] $z^{14} \in \mathbb{R}$
- [ ] $\mathrm{Re}(z^8) > 0$
- [x] $\mathrm{Im}(z^{11}) < 0$

Question [`QCM-complexes-B`] **:** Soient les ensembles du plan complexe

$$A = \left\{z \in \mathbb{C} \colon z^2\left(|z| - 2\right) = 0\right\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}(z) = 1\}.$$

Alors :

- [x] $A \cap B$ contient deux points
- [ ] $A \cap B$ est l'ensemble vide
- [ ] $A \cap B$ contient exactement un point
- [ ] $A \cap B$ contient tous les points d'une droite

Question [`QCM-contin-deriv-C1-B`] **:** Soient a et b deux nombres réels tels que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 0\,, \\ \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x} & \text{si } x > 0\,, \end{cases}$$

est dérivable en $x = 0$. Alors :

- [ ] $f(-3) = \frac{1}{4}$
- [ ] $f(-3) = -\frac{3}{8}$
- [x] $f(-3) = \frac{7}{8}$
- [ ] $f(-3) = \frac{3}{8}$

Question [`QCM-contin-vs-derivab-A`] **:** Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0\,, \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{si } 0 < x \leq 1\,, \\ 0 & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

Alors :

- [ ] f est continue en $x = 0$ et dérivable en $x = 1$
- [ ] f est dérivable à gauche en $x = 0$ et dérivable en $x = 1$
- [x] f est dérivable en $x = 0$ et continue en $x = 1$
- [ ] f est dérivable à droite en $x = 0$ et dérivable à gauche en $x = 1$

Question [`QCM-derivee-B`] **:** La dérivée de la fonction $f(x) = (1 + x^2)^{1+x^2}$ au point $x = 1$ est égale à :

- [x] $8\,(\mathrm{Log}(2) + 1)$
- [ ] $4\,(\mathrm{Log}(2) + 1)$
- [ ] 4
- [ ] 8

Question [QCM-dev-limite-A] : Soit $f\colon\,]-1,1[\,\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t)=\dfrac{1}{4+3t}$, et $t_0=0$. Alors le développement limité d'ordre deux de f autour de t_0 est donné par :

- ■ $f(t)=\frac{1}{4}-\frac{3}{16}t+\frac{9}{64}t^2+t^2\varepsilon(t)$
- □ $f(t)=\frac{1}{4}-\frac{3}{16}t+\frac{9}{128}t^2+t^2\varepsilon(t)$
- □ $f(t)=\frac{1}{4}+\frac{3}{16}t-\frac{9}{64}t^2+t^2\varepsilon(t)$
- □ $f(t)=\frac{1}{4}-\frac{3}{16}t+\frac{9}{32}t^2+t^2\varepsilon(t)$

Question [QCM-dev-limite-B] : Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=\sin(\sin(x))$, et $x_0=0$. Alors le développement limité d'ordre cinq de f autour de x_0 est donné par :

- ■ $f(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{10}x^5+x^5\varepsilon(x)$
- □ $f(x)=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+x^5\varepsilon(x)$
- □ $f(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{120}x^5+x^5\varepsilon(x)$
- □ $f(x)=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{10}x^5+x^5\varepsilon(x)$

Question [QCM-induction-B1] : Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=x^3$. Soit $f_1=f$ et, pour tout $n\geq 2$, $f_n=f\circ f_{n-1}$. Alors pour tout $n\geq 1$:

- ■ $f_n(x)=x^{(3^n)}$
- □ $f_n(x)=x^{(3n)}$
- □ $f_n(x)=(3x)^n$
- □ $f_n(x)=nx^3$

Question [QCM-inf-sup-B] : Soit A l'ensemble défini par $A=\left\{x\in\mathbb{R}\colon 0<\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right)<\frac{\pi}{4}\right\}$. Alors :

- ■ A n'est pas borné
- □ $A=\left]1,\frac{\pi}{2}\right[$
- □ $\mathrm{Inf}\,A=\frac{\pi}{2}$
- □ $A=\,]0,1[$

Question [QCM-int-generalisee-B] : L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{2^-}\frac{x+1}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x$

- ■ converge et vaut $\frac{16}{3}$
- □ converge et vaut 4
- □ converge et vaut $\frac{8}{3}$
- □ diverge

Question [QCM-integrale-second-A] : L'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x\,\sin(x)\,\mathrm{d}x$ vaut

- ■ 2π
- □ $-\pi$
- □ $\frac{3\pi}{2}$
- □ 0

Question [QCM-integrale-second-B] : L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\,\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ vaut

- ■ $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$
- □ $3(2\sqrt{2}-1)$
- □ $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$
- □ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Question [QCM-limite-B] : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $a_n=\dfrac{(n+3)^{1/2}-n^{1/2}}{(n+1)^{-1/2}}$. Alors :

- ■ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{2}$
- □ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$
- □ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$
- □ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$

Catalogue

Question [`QCM-limite-prolongmt-A`] **:** Soit $f\colon\ ]-\pi,\pi[\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\operatorname{Arctg}(x^2)}{x\sin(x)}$. Alors :

■ f admet un prolongement par continuité en $x=0$, noté $\hat{f}$, et $\hat{f}(0)=1$.

□ f admet un prolongement par continuité en $x=0$, noté $\hat{f}$, et $\hat{f}(0)=0$.

□ f admet un prolongement par continuité en $x=0$, noté $\hat{f}$, et $\hat{f}(0)=\frac{\pi}{2}$.

□ f n'admet pas de prolongement par continuité en $x=0$ car $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$.

Question [`QCM-limite-prolongmt-D`] **:** Parmi les fonctions

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\,\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x\neq0,\\ 1 & \text{si } x=0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\operatorname{Arctg}(x) & \text{si } x\neq0,\\ 1 & \text{si } x=0,\end{cases}$$

lesquelles sont continues en $x=0$?

□ f et g □ f, mais pas g ■ g, mais pas f □ ni f, ni g

Question [`QCM-minmax-A`] **:** Pour toute fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ qui admet en $x=0$ un point de minimum local, on a :

■ $f'(0)=0$ et $f''(0)\geq0$ □ $f'(0)=0$ et $f''(0)\neq0$

□ $f'(0)\neq0$ et $f''(0)\neq0$ □ $f'(0)=0$ et $f''(0)\leq0$

Question [`QCM-serie-A`] **:** Soit $(a_n)_{n\geq1}$ la suite définie par $a_n=(-1)^n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Alors :

■ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ converge absolument   □ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$ converge, mais $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ diverge

□ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ converge, mais pas absolument   □ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, mais $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ diverge

Question [`QCM-serie-entiere-A`] **:** L'intervalle de convergence I de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sqrt{n}\,(x+1)^n$ est donné par :

□ $I=\mathbb{R}$ □ $I=\left[-\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right]$ □ $I=\,]-1,1[$ ■ $I=\,]-2,0[$

Question [`QCM-serie-parametre-B`] **:** Soit la série avec paramètre $b\in\mathbb{R}$ définie par :

$$s=\sum_{k=1}^{\infty}\left(b+\frac{1}{k}\right)^k$$

Alors s converge pour tout :

■ $b\in\,]-1,1[$ □ $b\in\,]-1,1]$ □ $b<1$ □ $b\leq1$

Question [`QCM-suites-convergence-B`] : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $a_n = \dfrac{(5n+1)^n}{n^n 5^n}$. Alors :

- [x] $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{5}}$
- [ ] $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$
- [ ] $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- [ ] $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Question [`QCM-suites-convergence-C`] : Soit $c \in \mathbb{R}$, et $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \quad \text{si } n \text{ est pair}, \qquad a_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right)^c \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Alors :

- [x] la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ converge pour exactement une valeur de c
- [ ] la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ diverge quelle que soit la valeur de c
- [ ] $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m} = +\infty$
- [ ] $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1} = c$

Question [`QCM-theo-accr-finis-B`] : Pour toute fonction $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$, continue sur $[0,4]$ et dérivable sur $]0,4[$, qui satisfait $f'(x) \geq 2$ pour tout $x \in]0,4[$, on a :

- [ ] $f(4) - f(1) \leq 4$
- [ ] $f(4) - f(0) \leq 1$
- [x] $f(2) - f(0) \geq 4$
- [ ] $0 \leq f(3) - f(2) \leq 1$

Question [`QCM-val-intermed-image-interv-B`] : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 \sin(x^2)$, et $I \subset \mathbb{R}$ son ensemble image,

$$I = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = y\}.$$

Alors :

- [x] $I = \mathbb{R}$
- [ ] $I = [-1,1]$
- [ ] $I = [0,1]$
- [ ] $I = [0,+\infty[$

Partie commune, 11 questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question [`TF-complexes-A`] : Pour tout $y \in \mathbb{R}$ donné, $y \neq 0$, l'équation $z^4 = \mathrm{i}\,y$ possède exactement quatre racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

■ VRAI □ FAUX

Question [`TF-derivabilite-discussion-A`] : Soient g et h deux fonctions dérivables sur $]-1,1[$, telles que $g(0) = h(0) = 0$, et $h'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]-1,1[$. Si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g'(x)}{h'(x)}$ n'existe pas, alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{h(x)}$ n'existe pas.

□ VRAI ■ FAUX

Question [`TF-dev-limite-A`] : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction possédant un développement limité d'ordre deux autour de zéro, donné par $f(x) = a + bx + cx^2 + x^2\varepsilon(x)$. Alors le développement limité d'ordre deux de $g(x) = f(x)^3$ autour de zéro est donné par $g(x) = a^3 + b^3x + c^3x^2 + x^2\varepsilon(x)$.

□ VRAI ■ FAUX

Question [`TF-fonction-etc-B`] : Soit $f\colon\ ]0,1[\ \to \mathbb{R}$ une fonction monotone, non-constante, et dérivable sur $]0,1[$. Alors soit $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0,1[$, soit $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0,1[$.

■ VRAI □ FAUX

Question [`TF-induction-suites-limites-B`] : Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites convergentes avec $b_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$. Alors la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ existe.

□ VRAI ■ FAUX

Question [`TF-inf-sup-A`] : Soit $A \subset \mathbb{R}$. Si $\operatorname{Inf} A \in A$ et $\operatorname{Sup} A \in A$, alors A est un intervalle fermé.

□ VRAI ■ FAUX

Question [`TF-integrale-A`] **:** Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $(b_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$b_n = \int_0^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad n \geq 1\,.$$

Alors $(b_n)_{n\geq 1}$ est une suite convergente.

■ VRAI ☐ FAUX

Question [`TF-soussuite-A`] **:** Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. S'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question [`TF-serie-B`] **:** Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $n \geq 1$, $f(n) > n$. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ converge.

☐ VRAI ■ FAUX

Question [`TF-serie-entiere-A`] **:** Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite de nombres réels telle que pour tout $k \geq 0$, $a_k \neq 0$, et telle que $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 0$. Alors la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question [`TF-soussuite-B`] **:** Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres réels telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, alors elle ne possède aucune sous-suite bornée.

■ VRAI ☐ FAUX