EPFL

Ens: S. Friedli
Analyse I - (n/a)
11 janvier 2021
3 heures

n/a

n/a

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 pages (les dernières pouvant être vides), et 34 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - $+3$ points si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - $+1$ point si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Partie commune, 23 questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Pour toute fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ qui admet en $x = 0$ un point de minimum local, on a :

- ☐ $f'(0) = 0$ et $f''(0) \neq 0$
- ☐ $f'(0) \neq 0$ et $f''(0) \neq 0$
- ☐ $f'(0) = 0$ et $f''(0) \geq 0$
- ☐ $f'(0) = 0$ et $f''(0) \leq 0$

Question 2 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0\,, \\ \sqrt{1-x^2} & \text{si } 0 < x \leq 1\,, \\ 0 & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

Alors :

- ☐ f est dérivable en $x = 0$ et continue en $x = 1$
- ☐ f est dérivable à gauche en $x = 0$ et dérivable en $x = 1$
- ☐ f est continue en $x = 0$ et dérivable en $x = 1$
- ☐ f est dérivable à droite en $x = 0$ et dérivable à gauche en $x = 1$

Question 3 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3$. Soit $f_1 = f$ et, pour tout $n \geq 2$, $f_n = f \circ f_{n-1}$. Alors pour tout $n \geq 1$:

- ☐ $f_n(x) = nx^3$
- ☐ $f_n(x) = x^{(3n)}$
- ☐ $f_n(x) = (3x)^n$
- ☐ $f_n(x) = x^{(3^n)}$

Question 4 : Soit $c \in \mathbb{R}$, et $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \quad \text{si } n \text{ est pair,} \qquad a_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right)^c \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Alors :

- ☐ $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m} = +\infty$
- ☐ la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ converge pour exactement une valeur de c
- ☐ $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1} = c$
- ☐ la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ diverge quelle que soit la valeur de c

Question 5 : Soit $f\colon\ ]-\pi,\pi[\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{Arctg}(x^2)}{x\sin(x)}$. Alors :

- ☐ f admet un prolongement par continuité en $x = 0$, noté $\hat{f}$, et $\hat{f}(0) = 0$.
- ☐ f admet un prolongement par continuité en $x = 0$, noté $\hat{f}$, et $\hat{f}(0) = 1$.
- ☐ f admet un prolongement par continuité en $x = 0$, noté $\hat{f}$, et $\hat{f}(0) = \frac{\pi}{2}$.
- ☐ f n'admet pas de prolongement par continuité en $x = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

Question 6 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2\sin(x^2)$, et $I \subset \mathbb{R}$ son ensemble image,

$$I = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = y\}.$$

Alors :

☐ $I = [0,+\infty[$ ☐ $I = [0,1]$ ☐ $I = \mathbb{R}$ ☐ $I = [-1,1]$

Question 7 : Soit A l'ensemble défini par $A = \left\{x \in \mathbb{R}\colon 0 < \mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{\pi}{4}\right\}$. Alors :

☐ $A =]0,1[$ ☐ A n'est pas borné
☐ $A = \left]1,\frac{\pi}{2}\right[$ ☐ $\mathrm{Inf}\, A = \frac{\pi}{2}$

Question 8 : Soit la série avec paramètre $b \in \mathbb{R}$ définie par :

$$s = \sum_{k=1}^{\infty}\left(b + \frac{1}{k}\right)^k$$

Alors s converge pour tout :

☐ $b \leq 1$ ☐ $b \in]-1,1[$ ☐ $b < 1$ ☐ $b \in]-1,1]$

Question 9 : Soient a et b deux nombres réels tels que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 0\,, \\ \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{si } x > 0\,, \end{cases}$$

est dérivable en $x = 0$. Alors :

☐ $f(-3) = \frac{3}{8}$ ☐ $f(-3) = -\frac{3}{8}$ ☐ $f(-3) = \frac{7}{8}$ ☐ $f(-3) = \frac{1}{4}$

Question 10 : Parmi les fonctions

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}\,\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\,\mathrm{Arctg}\,(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

lesquelles sont continues en $x = 0$?

☐ f et g ☐ ni f, ni g ☐ g, mais pas f ☐ f, mais pas g

Question 11 : L'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} x\,\sin(x)\,\mathrm{d}x$ vaut

☐ $\frac{3\pi}{2}$ ☐ $-\pi$ ☐ 2π ☐ 0

Question 12 : Soient les ensembles du plan complexe

$$A = \left\{z \in \mathbb{C}\colon\, z^2\,(|z|-2) = 0\right\}\,, \qquad B = \{z \in \mathbb{C}\colon\, \mathrm{Re}\,(z) = 1\}\,.$$

Alors :

☐ $A \cap B$ contient deux points

☐ $A \cap B$ contient exactement un point

☐ $A \cap B$ contient tous les points d'une droite

☐ $A \cap B$ est l'ensemble vide

Question 13 : La dérivée de la fonction $f(x) = (1+x^2)^{1+x^2}$ au point $x = 1$ est égale à :

☐ $8\,(\mathrm{Log}(2)+1)$ ☐ 8 ☐ 4 ☐ $4\,(\mathrm{Log}(2)+1)$

Question 14 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $a_n = \dfrac{(n+3)^{1/2} - n^{1/2}}{(n+1)^{-1/2}}$. Alors :

☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$ ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$

Question 15 : Soit le nombre complexe $z = 1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$. Alors :

☐ $z^{14} \in \mathbb{R}$ ☐ $\mathrm{Re}(z^8) > 0$ ☐ $|z^6| > 73$ ☐ $\mathrm{Im}(z^{11}) < 0$

Question 16 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $a_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Alors :

☐ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$ converge, mais $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, mais $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

☐ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, mais pas absolument

☐ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument

Question 17 : Pour toute fonction $f\colon\, [0,4] \to \mathbb{R}$, continue sur $[0,4]$ et dérivable sur $]0,4[$, qui satisfait $f'(x) \geq 2$ pour tout $x \in\,]0,4[$, on a :

☐ $0 \leq f(3) - f(2) \leq 1$

☐ $f(4) - f(1) \leq 4$

☐ $f(4) - f(0) \leq 1$

☐ $f(2) - f(0) \geq 4$

Question 18 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sin(\sin(x))$, et $x_0 = 0$. Alors le développement limité d'ordre cinq de f autour de x_0 est donné par :

- ☐ $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + x^5\varepsilon(x)$
- ☐ $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + x^5\varepsilon(x)$
- ☐ $f(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + x^5\varepsilon(x)$
- ☐ $f(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + x^5\varepsilon(x)$

Question 19 : Soit $f\colon \left]-1,1\right[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \dfrac{1}{4+3t}$, et $t_0 = 0$. Alors le développement limité d'ordre deux de f autour de t_0 est donné par :

- ☐ $f(t) = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}t + \frac{9}{32}t^2 + t^2\varepsilon(t)$
- ☐ $f(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16}t - \frac{9}{64}t^2 + t^2\varepsilon(t)$
- ☐ $f(t) = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}t + \frac{9}{64}t^2 + t^2\varepsilon(t)$
- ☐ $f(t) = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}t + \frac{9}{128}t^2 + t^2\varepsilon(t)$

Question 20 : L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{2^-} \frac{x+1}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x$

- ☐ converge et vaut $\frac{8}{3}$
- ☐ converge et vaut 4
- ☐ converge et vaut $\frac{16}{3}$
- ☐ diverge

Question 21 : L'intervalle de convergence I de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\,(x+1)^n$ est donné par :

- ☐ $I = \left]-2,0\right[$
- ☐ $I = \left[-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right]$
- ☐ $I = \left]-1,1\right[$
- ☐ $I = \mathbb{R}$

Question 22 : L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ vaut

- ☐ $3(2\sqrt{2}-1)$
- ☐ $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$
- ☐ $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$
- ☐ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Question 23 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $a_n = \dfrac{(5n+1)^n}{n^n 5^n}$. Alors :

- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{5}}$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Partie commune, 11 questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 24 : Soit $f\colon\,]0,1[\, \to \mathbb{R}$ une fonction monotone, non-constante, et dérivable sur $]0,1[$. Alors soit $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in\,]0,1[$, soit $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in\,]0,1[$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Pour tout $y \in \mathbb{R}$ donné, $y \neq 0$, l'équation $z^4 = \mathrm{i}\, y$ possède exactement quatre racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite de nombres réels telle que pour tout $k \geq 0$, $a_k \neq 0$, et telle que $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 0$. Alors la série entière $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soit $A \subset \mathbb{R}$. Si $\operatorname{Inf} A \in A$ et $\operatorname{Sup} A \in A$, alors A est un intervalle fermé.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soient g et h deux fonctions dérivables sur $]-1,1[$, telles que $g(0) = h(0) = 0$, et $h'(x) \neq 0$ pour tout $x \in\,]-1,1[$. Si $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{h'(x)}$ n'existe pas, alors $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{h(x)}$ n'existe pas.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 29 : Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $n \geq 1$, $f(n) > n$. Alors la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ converge.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 30 : Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres réels telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, alors elle ne possède aucune sous-suite bornée.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 31 : Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. S'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 32 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction possédant un développement limité d'ordre deux autour de zéro, donné par $f(x) = a + bx + cx^2 + x^2\varepsilon(x)$. Alors le développement limité d'ordre deux de $g(x) = f(x)^3$ autour de zéro est donné par $g(x) = a^3 + b^3x + c^3x^2 + x^2\varepsilon(x)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 33 : Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites convergentes avec $b_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$. Alors la limite $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ existe.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 34 : Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $(b_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$b_n = \int_0^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad n \geq 1\,.$$

Alors $(b_n)_{n\geq 1}$ est une suite convergente.

☐ VRAI ☐ FAUX