**Ens. S. Friedli - Analyse I - (n/a)**

**14 janvier 2019 - durée : 3 heures**

# n/a

## n/a

SCIPER : **999999**

**Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.**

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

  $+3$ points si la réponse est correcte,

  $0$ point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,

  $-1$ point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

  $+1$ point si la réponse est correcte,

  $0$ point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,

  $-1$ point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

| choisir une réponse \| select an answer Antwort auswählen | ne PAS choisir une réponse \| NOT select an answer NICHT Antwort auswählen | Corriger une réponse \| Correct an answer Antwort korrigieren |
|---|---|---|

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Catalogue

## Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

**Question [`QCM-complexes-B`] :** Soit $S$ l'ensemble des solutions de l'équation complexe $\overline{z}^2 = z^2$. Alors :

- [ ] $S = \{-1, +1, -\mathrm{i}, +\mathrm{i}\}$
- [ ] $S = \emptyset$
- [x] $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 0 \text{ ou } \mathrm{Im}(z) = 0\}$
- [ ] $S = \mathbb{R}$

**Question [`QCM-contin-deriv-C1-B`] :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x\,|\cos(x)|$. Alors :

- [ ] $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais pas dérivable en $x = 0$
- [x] $f$ est dérivable en $x = 0$, mais pas en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- [ ] $f$ n'est pas deux fois dérivable en $x = 0$
- [ ] $f$ est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$

**Question [`QCM-contin-vs-derivab-B`] :** Soit $p \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} |x|^p \operatorname{Log}(|x|) & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

- [x] Si $p = \frac{6}{5}$, alors $f$ est dérivable en $x = 0$.
- [ ] Si $p = \frac{1}{2}$, alors $f$ n'est pas continue en $x = 0$.
- [ ] Si $p = \frac{3}{2}$, alors $f$ n'est pas dérivable en $x = 0$.
- [ ] Si $p = \frac{2}{3}$, alors $f$ est continue à droite en $x = 0$, mais pas à gauche.

**Question [`QCM-dev-limite-A`] :** Le polynôme de Taylor d'ordre 4 autour de 0 de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1-\sin(x)}$ est

- [ ] $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4$
- [x] $1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^4$
- [ ] $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4$
- [ ] $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

**Question [`QCM-induction-A-2`] :** Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n}$. Alors :

- [x] $0 < u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$
- [ ] $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante
- [ ] $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$
- [ ] $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

**Question [`QCM-inf-sup-E`] :** Soit $A$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par $A = \Big\{x > 0 \,:\, \cos\Big(\dfrac{1}{x}\Big) > 0\Big\}$. Alors :

- [x] $\operatorname{Inf} A = 0$
- [ ] $\operatorname{Sup} A = \dfrac{\pi}{2}$
- [ ] $\operatorname{Sup} A = 0$
- [ ] $\operatorname{Inf} A = \dfrac{2}{\pi}$

**Question** [`QCM-int-generalisee-A`] **:** L'intégrale impropre $I = \displaystyle\int_{0^+}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,\mathrm{d}x$

■ converge, et sa valeur est $I = \sqrt{2}$

□ converge, et sa valeur est $I = \frac{1}{2}\operatorname{Log}(\frac{1}{2})$

□ diverge, car $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \operatorname{Log}\big(\sqrt{\sin(\varepsilon)}\,\big) = -\infty$

□ diverge, car $\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$ n'est pas définie en $x = 0$

**Question** [`QCM-integrale-first-A`] **:** Soit l'intégrale définie $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$. Alors :

■ $I = \frac{4}{3} - 4\operatorname{Log}(\frac{4}{3})$

□ $I = \frac{5}{3} - 4\operatorname{Log}(\frac{3}{2})$

□ $I = \operatorname{Log}(2) + \frac{1}{2}$

□ $I = 2\operatorname{Log}(2) + 1$

**Question** [`QCM-integrale-second-A`] **:** Soit l'intégrale définie $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,\mathrm{d}x$. Alors :

■ $I = 2\big(\operatorname{Arctg}(\sqrt{3}\,) - \frac{\pi}{4}\big)$

□ $I = \frac{1}{2}\big(\operatorname{Arctg}(3) - \frac{\pi}{4}\big)$

□ $I = 2\big(\sqrt{3} - 1\big) + \operatorname{Log}(2)$

□ $I = \sqrt{3} - 1 + \operatorname{Log}(2)$

**Question** [`QCM-limite-prolongmt-B`] **:** Soit $m \in \mathbb{R}$, et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x)}{\operatorname{Log}\big(1+2x^2\big)} & \text{si } x < 0\,, \\ m & \text{si } x = 0\,, \\ \dfrac{x+1}{x^2+3x+1} & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

■ Si $m = \frac{1}{2}$, alors $f$ est continue à gauche mais pas à droite en $x = 0$.

□ Si $m = \frac{1}{3}$, $f$ est continue à droite mais pas à gauche en $x = 0$.

□ Si $m = 1$, alors $f$ est continue en $x = 0$.

□ Si $m = \frac{1}{2}$, alors $f$ est continue en $x = 0$.

**Question** [`QCM-limsup-liminf-B`] **:** Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $x_n = \sqrt[n]{7}$ si $n$ est pair et $x_n = \dfrac{1}{n^7}$ si $n$ est impair. Alors :

■ $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} x_n = 1$ et $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} x_n = 0$

□ $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} x_n = 0$ et $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} x_n = 1$

□ $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = 0$

□ $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = 1$

**Question** [`QCM-propriete-fonction-A`] **:** Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}}$. Alors :

■ $f$ possède un seul point de minimum local dans $\mathbb{R}$

□ $f$ possède un seul point de maximum local dans $\mathbb{R}$

□ $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

□ $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

## Catalogue

**Question** [`QCM-serie-B`] **:** Soit $\lambda = -\frac{1}{6}$. Déterminer, parmi les séries ci-dessous, celle qui converge.

■ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\Big)^n$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{1-\lambda^2}\Big)^n$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^n}$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\lambda}}$

**Question** [`QCM-serie-entiere-A`] **:** Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{4}{2+3x}$. La série de Taylor de $f$ autour de $x = 2$ est:

■ $f(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\big(-\tfrac{3}{8}\big)^k(x-2)^k$ pour $x \in \ \big]-\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\big[$

☐ $f(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\big(\tfrac{3}{8}\big)^k(x+2)^k$ pour $x \in \ \big]-\frac{14}{3}, \frac{2}{3}\big[$

☐ $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\big(\tfrac{3}{8}\big)^k(x-2)^k$ pour $x \in \ \big]-\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\big[$

☐ $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\big(-\tfrac{3}{8}\big)^k(x-2)^k$ pour $x \in \ ]1, 3[$

**Question** [`QCM-serie-parametre-B`] **:** Soit $s$ un paramètre réel, et soit $(b_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $b_n = \dfrac{1}{n^s}$ si $n$ est pair, $b_n = \dfrac{1}{n^{2s}}$ si $n$ est impair. Alors la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge si et seulement si

■ $s > 1$ ☐ $s > \frac{1}{2}$ ☐ $s > 0$ ☐ $s > 2$

**Question** [`QCM-suites-convergence-A`] **:** Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $x_n = \dfrac{2^{2n}}{(7n)!}$. Lorsque $n \to \infty$, cette suite

■ converge vers 0

☐ converge vers $\dfrac{4}{7}$

☐ diverge

☐ converge vers $\dfrac{\mathrm{Log}\,(2)}{7}$

**Question** [`QCM-suites-recurrence-B`] **:** Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $a_0 = \frac{3}{2}$, et pour $n \geq 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{8a_n - 7}$. Alors :

☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

■ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

☐ la suite est divergente

**Question** [`QCM-theo-accr-finis-B`] **:** Soit $f : ]-3, 2[ \ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 + 4x - 1$. Alors pour tous les $x \in \ ]-3, 2[$ et $y \in \ ]-3, 2[$ , tels que $x \neq y$, on a:

☐ $-1 \leq \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 9$

■ $-2 \leq \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 8$

☐ $-3 \leq \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 7$

☐ $-4 \leq \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 6$

## Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

**Question [`TF-complexes-C`] :** Soit $z \neq 0$ un nombre complexe dont l'argument vaut $\frac{\pi}{4}$. Alors l'argument du nombre complexe $\frac{1}{z^2}$ vaut $-\frac{\pi}{2}$.

■ VRAI ☐ FAUX

**Question [`TF-derivabilite-discussion-B`] :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$, telle que l'équation $f'(x) = 0$ possède exactement une solution. Alors l'équation $f(x) = 1$ possède au plus deux solutions réelles distinctes.

■ VRAI ☐ FAUX

**Question [`TF-dev-limite-B`] :** Soit $f : ]-1, 1[ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^5$ dont le développement limité d'ordre 4 en $x = 0$ est donné par

$$f(x) = 1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + x^4\varepsilon(x),$$

où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Alors $f'(0) + 3f^{(2)}(0) + f^{(3)}(0) = 1$.

■ VRAI ☐ FAUX

**Question [`TF-fonction-etc-B`] :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective. Alors $f$ est strictement monotone.

☐ VRAI ■ FAUX

**Question [`TF-induction-suites-limites-A`] :** Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $x_0 = 2$ et, pour $n \geq 1$, $x_n = x_{n-1} - \frac{1}{n}$. Alors $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

☐ VRAI ■ FAUX

**Question [`TF-inf-sup-B`] :** Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble borné, et $B = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ est un majorant de } A\}$. Alors $\operatorname{Inf} B \in B$.

■ VRAI ☐ FAUX

**Question [`TF-integrale-B`] :** La fonction $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \int_0^{|x|} 1\,dt$ est dérivable en $x = 0$.

☐ VRAI ■ FAUX

**Question [`TF-limites-continuite-A`] :** Soit $f\colon [-2, 20] \to [0, 1]$ une fonction continue. Alors il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$.

■ VRAI ☐ FAUX

**Question [`TF-serie-AA`] :** La série numérique $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge.

■ VRAI ☐ FAUX

**Question [`TF-serie-entiere-B`] :** La série entière $\displaystyle\sum_{k=100}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

■ VRAI ☐ FAUX

## Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 29:** *Cette question est notée sur 7 points.*

□0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 ■7 *Réservé au correcteur*

Soit

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2x - 2}\,.$$

(a) Montrer que $f(x)$ est bien définie en tout point $x \in [1, 3]$.

(b) Calculer les extrema globaux de $f$ sur l'intervalle $[1, 3]$, en détaillant les étapes de votre raisonnement.

**Question 30:** *Cette question est notée sur 5 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5 *Réservé au correcteur*

Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0,2]$, dérivable sur $]0,2[$, telle que $f(0) = 1$, et telle que $f'(x) \leq -1$ pour tout $x \in\, ]0,2[$. Montrer qu'il existe $x_* \in\, ]0,2[$ tel que $f(x_*) = 0$.

(*Attention:* si on utilise des théorèmes vus au cours, on les énoncera, et on expliquera pourquoi ils s'appliquent dans ce cas.)

**Question 31:** *Cette question est notée sur 4 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ■ 4 *Réservé au correcteur*

(a) Soit $f$ une fonction réelle définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$. Donner la définition rigoureuse de l'expression suivante:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L\,.$$

(b) Soit $f(x) = 5x + 1$. Montrer, à l'aide de la définition donnée au point précédent, et en justifiant toutes les étapes de votre raisonnement, que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 11\,.$$